Title: Matematyka nie opisuje świata, lecz wychodzi mu naprzeciw

Author: Jerzy Mioduszewski

Citation style: Mioduszewski Jerzy. (2015). Matematyka nie opisuje świata, lecz wychodzi mu naprzeciw. "Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" Nr 58 (2015), s. 7-43

Matematyka nie opisuje świata, lecz wychodzi mu naprzeciw

Jerzy Mioduszewski
Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski

Mathematics does not describe the world, but faces it

Abstract

In everyday experience mathematics rarely appears to us as a whole, and certainly never as a system in the sense of David Hilbert's considerations from early 20th Century. Mathematical disciplines seem to be independent and autonomous. We do not see that specific deduction goes beyond particular convention applicable in given discipline. In the late 19th Century this view was shared by Felix Klein and Richard Dedekind. The latter's work "What are numbers and what should they be?" (*Was Was sind und was sollen die Zahlen?*) was the inspiration for writing this article. This essay is an attempt to see mathematics not as a building, but as a living organism seeking its explanation.

Keywords

philosophy of mathematics, Richard Dedekind, arithmetic, geometry, number sense, calculus, incommensurability, transfinite numbers

Pochodne i całki, wzory Eulera w rodzaju $\pi^2/6$, teoria mnogości. Jedno mogłoby istnieć bez drugiego. To wszystko matematyka. Czy jest jakąś całością? Jest anegdota o Erdösu, który zwierzył się swojemu równie znakomitemu koledze, że nie zrozumiał nigdy teorii Galois. To nie dla ciebie, Paul – usłyszał w odpowiedzi. Dla kogo zatem jest twierdzenie matematyczne? Na czym nam w nim zależy? Arystoteles uważał, że nie jesteśmy przywiązani do samej treści twierdzenia matematycznego. Równie dobrze przyjmujemy jego negację, o ile okaże się prawdziwa. Pewne obserwacje są za tym, by zgodzić się z Filozofem, ale w wyniku naszych dalszych rozważań dojdziemy i do innych konkluzji, bo może chodzi tu jeszcze o coś innego.

Rytm Dnia Pierwszego

Lokum matematyki to „świat S naszych myśli". Zwrot pochodzi ze słynnego, chociaż niewielkiego i nie do końca zrozumianego przez matematyków, dzieła Richarda Dedekinda *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888).

Pomyślmy myśl – pewien ustalony element wspomnianego świata S. Umysł nie jest w stanie powstrzymać się od „myśli o tej myśli", a w rezultacie od „potoku myśli", który jest podobny do potoku liczb. Nie od razu Dedekind doszedł do tego wniosku. Poświęcił dziesiątki stronic, aby z owego potoku myśli wydobyć wspomnianą minimalną nić. Nie wskazywał żadnej konkretnej liczby, lecz rytm przenikający świat S, który jest n i e s k o ń c z o n y. Po przesunięciu o jedną myśl dostajemy ten sam świat S. Liczba nie jest u Dedekinda wytworem ani czasu rozumianego fizycznie, ani przestrzeni, jak u Kanta. Mogła powstać już w P i e r w s z y m D n i u, już w samej myśli Stwórcy.

Giuseppe Peano dwa lata później zredukował myśl Dedekinda do aksjomatu indukcji w zakresie liczb naturalnych. Dedekind w milczeniu przyjął to uproszczenie.

Doświadczenie myślowe Dedekinda skłania do wniosku, że w naszej myśli mogą powstawać pewne konstrukcje niezależnie od bodźców zewnętrznych. Nasza myśl nie staje wobec świata bezbronna. Napisał gdzieś Max Scheller: żyjemy światu naprzeciw. Narzucamy światu r y t m n a s t ę p s t w a i widzimy go jako nieskończony, nie zapytując świata, czy życzy sobie takiego jego rozumienia.

Nie było nas w Pierwszym Dniu, a jeśli byliśmy, to bez świadomości, i do wiadomości naszej ten pierwotny rytm nie zawitał. Nie znaczy to, by nie odcisnął się w nas w jakiejś pierwotnej formie na naszym świecie S. Dlatego nie są nam obce pierwsze jego takty, jakie były nam wtedy darowane. Czy rytm świata S jest fragmentem czegoś szerszego, tylko się domyślamy. Bo czy nie podlega temu rytmowi nasz język i nasze płynięcie w czasie?

Jest to rytm następstwa. Ale znamy też kontemplację, kiedy myśl płynie w sposób ciągły. My wszakże wyodrębniamy oddzielne stany i formułujemy oddzielne sądy. Na ich rytmie i następstwie oparte są nasze czynności logiczne. I chociaż myślenie mogłoby być ciągłe, to nasza jego ekspresja zdaje się wymagać zamknięć w zdania, które są jakby jego atomami. Atomizm myślowy jest wielką zagadką naszego świata S, nie wydaje się być jego koniecznością.

Nie panujemy nad pierwotnym rytmem naszych myśli i nie od razu rozpoznajemy jego dla nas znaczenie. Potokowi myśli, jakim obdarza nas indukcyjne następstwo, nie towarzyszy bezpośrednia refleksja. Jak pisze Andriej Biełyj, inspirowany matematyczną filozofią swego ojca Nikołaja Bugajewa, „myśli same się myślą", a wspomnijmy jeszcze potok myśli w *Herzogu* Saula Bellowa. Jesteśmy zniewoleni do wchodzenia w ich rytm. Nie umiemy wyłączyć się z ich strumienia, o czym pisał Bergson, oraz w znanej przed laty książce Ernest Dimnet, a powtarza współczesny nam Eckhart Tolle. Podobnie widzi nasz gramatycznie uporządkowany potok fraz językowych Noam Chomsky, co obszernie omawia w swojej niedawno u nas wydanej książce książce Keith Devlin.

Naprzeciw światu

Świat S jest wszakże bogatszy niż to, co daje sam rytm indukcji. Jesteśmy dziećmi D n i a S z ó s t e g o. To wtedy dostaliśmy w podarunku ś w i a d o m o ś ć, to znaczy poczucie kierowania sobą, poczucie naszej odrębności wobec tego, co nas otacza, a jednocześnie poczucie wspólnoty ze światem.

I dano nam tego Dnia zmysły, które lokują w świecie S całe obrazy świata zewnętrznego. Świat S nie poprzestaje na ich kontemplacji, ale stwarza środki wychodzące naprzeciw obrazom atakującym jego zmysły. Zastępuje te obrazy właściwą sobie konstrukcją własną. Nie jest przez to biernym odbiorcą wrażeń.

Konstrukcja, jaką świat S obudowuje odbierane obrazy, nie należy do rzeczy samych w sobie w znaczeniu Kanta. Jest polem wewnętrznym, jakie świat S tworzy w odpowiedzi na atakujące go z zewnątrz zjawiska. Oto tworzy pojęcie koła, którego formę narzuca „kołom" obecnym w świecie zewnętrznym. Postrzegając te „koła", wchodzi jedynie w te ich aspekty, które są obecne we wzorcowym kole mającym siedzibę w jego wnętrzu, to jest w naszej świadomości. Nie wszystkim obrazom świat S potrafi przeciwstawiać wzorce, ale ewolucja polega na wzbogacaniu ich zakresu.

Wzorce, którymi otacza się świat S, stanowią mur obronny przed nieznanym nam zewnętrzem. Chcemy, jak monada Leibniza, być odcięci od wpływów zakłócających nasze wnętrze. Obrazy selekcjonujemy według kierujących nami upodobań. Od siebie nawzajem odbieramy jedynie te sygnały, które przekazują określony rodzaj treści. Nie uczymy się od siebie, przelewając sobie nawzajem całe mózgi. Odbieramy jedynie izolowane sygnały wystarczające dla rozbudzenia w monadzie jej wewnętrznego świata.

Jak zauważa niezapamiętany z imienia Filozof – staramy się, by nasz świat wewnętrzny był nieprzystępny dla zewnętrznej – jak pisze – pospolitości. Bo przyjrzyjmy się obudowie monady w postaci pięknej muszli. Dzieło sztuki, aby obronić się przed przetworzeniem w kicz, zaznacza choćby jednym szczegółem – może być to nawet skaza – swoją odmienność od środowiska.

Ale przecież tym środowiskiem zewnętrznym się karmimy. Według Arystotelesa, nie ma niczego w naszych myślach, co by nie przeszło wcześniej przez zmysły. Myśl pozostawiona samej sobie zawęża się. I chociaż wdrukowany w nas rytm pierwotny sprawia, że nie zawęzi się do końca, to jednak nie wzbogaca on naszej świadomości.

Zmysły, które zasiedlają świat S, walczą w nim o miejsce dla siebie. Widzimy wśród nich również z m y s ł, którego zadaniem jest tworzenie wspomnianej konstrukcji odpowiadającej doznaniom zmysłowym przychodzącym z zewnątrz. Nazwijmy ten zmysł z m y s ł e m m a t e m a t y c z n y m. Zmysł matematyczny odczuwa przykrość, jeśli dla odbieranego przez siebie spostrzeżenia nie znajduje miejsca w budowanej konstrukcji. Odczuwa zadowolenie, wręcz spełnienie, z wprawnie wykonywanych czynności.

Tworzenie pojęć matematycznych, to koncert zmysłów biorących w tym udział. Zmysł matematyczny nie walczy tu o pierwszeństwo, dając w geometrii pole zmysłowi wzroku, w topologii zmysłowi dotyku, a w nauce o ruchu poczuciu intensywności zmiany, poczuciu natężenia siły i upływu czasu. Zostawia wszakże dla siebie ostatnie słowo. To zmysł matematyczny nadaje ostateczny kształt pojęciu...

Twórcy matematyki są coraz bardziej skłonni przyjmować, że wyjaśnienie istoty matematyki leży bardziej w rozpoznaniu natury świata S i zmysłów, które go zaludniają, niż w rozpoznaniu treści, które niesie matematyka. John von Neumann w swoich wczesnopowojennych esejach przyznaje, że nie poznawczość, lecz estetyzm, czy wręcz samolubność – dodajmy od siebie – jest tym, co kieruje matematyką. Hardy wręcz twierdził, że taka właśnie jest jej natura. Ukształtowany w innym świecie pojęć Szilow również twierdzi, że matematyka kieruje się w swym rozwoju własnymi prawami. Dołączają się do tego poglądu biologowie.

Z niepokojem zauważamy, że świat S naszych myśli mógłby się zamknąć w zbudowanym przez siebie gmachu, jeśliby zmysł matematyczny pozostawić samemu sobie. Ale dodajmy, że samolubność nie jest cechą wyłącznie tego zmysłu.

Metafizyka matematyki

Nasze poznawanie świata poprzedzone jest przekonaniami, nazwijmy je metafizycznymi. Metafizyka to aprioryczne przekonania – oczekiwania, ale też i uprzedzenia – wobec tego, co może przyjść z zewnątrz. Jest podarunkiem Dnia Szóstego. Ale jako o metafizycznym wypada nam myśleć także i o darowanym nam wcześniej rytmie Dnia Pierwszego. Poznanie matematyczne, poprzedzone apriorycznymi przekonaniami, tworzy coś co nazwalibyśmy matematycznością.

Dla pierwotnych wdrukowań i budowanych na nich przekonań świat S poszukuje potwierdzeń, dzięki którym stają się one prawdami powstałej konstrukcji. Kryterium prawdy to wewnętrzna harmonia – spójność – będąca wyrazem wzajemnego dopasowania elementów konstrukcji. Nie dopuszczeni jesteśmy do wglądu, jak ta harmonia ma się do treści prawd, to jest do prawdy w znaczeniu powszechnie przyjętym. Światu S musi wystarczać ich wewnętrzna zgodność, za co przed światem zewnętrznym odpowiada jako całość. Dba o tę zgodność ze względu na potrzebę zachowania swej wiarygodności, gotowy – w razie pojawienia się trudności, do przebudowy konstrukcji. Nie szuka potwierdzeń w świecie zewnętrznym dla każdego swego „dwa a dwa jest cztery".

Prawda matematyczna jest żywa, jeśli jest obecna w naszej świadomości. Trwa w umyśle dopóki trwa emocja z nią związana. Są przebłyski prawd matematycznych goszczące w umyśle przez chwilę. Bo prawdy matematyczne dotyczą raczej sytuacji niż tak zwanych bytów. Słyszało się, że niezapisane w porę dowody powstałe w Kawiarni Szkockiej bezpowrotnie ginęły. Ale prawdy matematyczne, nawet zapisane, mogłyby nie odżyć, jeśliby nie były dłuższy czas aktywnie przeżywane. Mimo to chcemy wierzyć, że są trwałe, a nawet wieczne, w tym znaczeniu, że jeśli przebłysk prawdy matematycznej zechce do nas zawitać po raz drugi, będzie ten sam, co przedtem.

Dopóki zainteresowaniem matematyki były figury geometrii i liczby w swych zjawiskowych indywidualnych postaciach, ten platoński pogląd na matematykę wydawał się właściwy. Ale wiek XIX uwidocznił, jak wiele w matematyce zależy od nas samych. Brouwer na początku XX wieku zwrócił uwagę na wpływ, jaki na prawdę matematyczną ma nasza logika. Interwencja logiczna jest interwencją *ad hoc*, polegającą na zapełnianiu luk myślowych. Te mogłyby pozostać niezamknięte, ale logika – cierpiąc na *horror vacui* – zamyka je na użytek doraźny w zdania, które w tej postaci są petryfikowane jako prawdy niezmienne. Wiele z nich zawiera prawdy niepotrzebne, z których matematyka, jak każdy organizm, musi się uwalniać.

Obecność logiki w rozumowaniach matematycznych jest najbardziej widoczna tam, gdzie dotyczą one pojęć słabo motywowanych intuicjami. To logika wprowadza do matematyki pojęcie s p r z e c z n o ś c i, nie umiejąc inaczej bronić się przed nonsensem. Sama matematyka zna jedynie t r u d n o ś c i. Opiera się na intuicjach, a te, jeśli na ich drodze pojawiają się trudności, ulegają adaptacji w przebudowanej strukturze pojęć. Dotyczyłoby to i logiki, gdyby można było znaleźć zmysł, któremu jest podporządkowana i który pozwala nam ją sensownie kształtować. Jedynie rytm pierwotny mógłby być postawiony w tej roli, ale nie panujemy nad nim, mimo – a może właśnie dlatego – że matematyka i logika płyną wspólnie tym rytmem wspomagając się wzajemnie,

Logika nie buduje matematyki. Matematyka, taka jak ją tu widzimy, n i e j e s t g m a c h e m, którego elementy zespojone są logiką. Dedukcja łączy lokalnie niektóre prawdy matematyczne. Nici, którymi łączy te prawdy, są krótkie. Całość matematyki j e s t o r g a n i z m e m, który swoją spójność zawdzięcza dalekiego zasięgu s y g n a ł o m pobudzającym dalekie od siebie autonomiczne regiony – m o n a d y świata S – wzbogacając lokalne konstrukcje o doznania pobrane gdzie indziej. Te sygnały nie przenoszą prawd na ten sposób, co dedukcja, są jedynie pobudzeniami. Prawda jest wypracowywana w każdej monadzie z osobna, logiką niewychodzącą poza monadę.

Jest również w ludzkim myśleniu jakiś przymus z w i e ń c z e ń naszych wyobrażeń o świecie. Zwieńczamy efektownymi zamknięciami otwarte wątki myślowe, co uwalnia nas od mierzenia się z pytaniami, odpowiadając na te pytania jakby nieswoimi myślami. Zdarza się, że ulegamy i korzystamy z wygodnego prezentu.

Nie wykluczamy, że niektóre z naszych zmysłów i związane z nimi doznania odzwierciedlają sens uniwersalny. Mimo to w samym charakterze zmysłu jest efemeryczność i gra. Zmysły nas zwodzą, wciągając do gry, mając swoje własne w niej cele. Razem tworzą wiecznie ewoluującą żywą konstrukcję, którą świat S ustawił naprzeciw światu. W zrozumieniu natury świata S powinna nas wspomóc, jak sądzimy, wiedza o organizmach żywych, ku której z obawą jednak sięgamy, by nie usłyszeć prawd zbyt trudnych.

Matematyka nie jest tworem jednorodnym. Abstrakty geometrii, takie jak punkt, prosta i koło, mają niemal idealnie jednoznaczne reprezentacje w świecie rzeczy objawiających się nam w postaci punktów, prostych i kół fizycznych. Abstrakcja wydaje się tu wręcz niepotrzebna.

Arytmetyka

Inaczej jest z arytmetyką i ogólniejszą od niej arytmetycznością, której rytm – jak sądzimy – był obecny w świecie już od jego Dnia Pierwszego. To w tym rytmie dopatrujemy się głębszego sensu liczby. Liczba nie pojawia się nam sama, w czystej postaci. Istnieje, jak pisze Mendelssohn, poprzez swoje wcielenia. Jeśli istnieje bezpośrednio, to jedynie jako element świata S. Mendelssohn nazywa arytmetykę „inną nauką", co znaczyłoby, że stawia ja poza celami poznawczymi. Liczba potrafi wcielić się w figurę jako jej aspekt, np. ilościowy, ale może się prezentować jako kolekcja punktów lub figur, to jest jako zbiór elementów. Potrafi się wcielić także w liczbę 5.

Bo pewne indywidualne liczby są zjawiskami. Najprostsze z nich pojawiają się pobudzone już samym rytmem indukcji, ale ich zakres poszerza się. Liczby 13 i 7 pojawiają się wcześniej jako zjawiska myślowe, niż liczba 6, która pojawia się nawet później niż biblijne dziesięć tysięcy. Jan Potocki słowami Velasqueza przekonuje nas, że liczby zjawiskowe nieobce są również naszym braciom mniejszym. Ten zakres liczb, rozbudowany przez nas myślowo, ujawnia cechy wychodzące poza pierwotny potok indukcyjny, rozbudowując się w dyscyplinę nazywaną teorią liczb. Chodzi tu również o aspekt ilościowy liczby, nieobecny bezpośrednio w rytmie indukcji. Wyodrębniony w ten sposób zakres liczb wydaje się być już kontrolowany zmysłowo. Nie wykluczamy, że ten zmysł jest też obecny również w naszych wyobrażeniach o z b i o r a c h i objawiającej się tam nieskończoności.

Liczba może się też ujawniać poprzez wcielenia pozaarytmetyczne. Liczba 17 pojawia się jako liczba boków wielokąta foremnego możliwego do skonstruowania w sposób klasyczny cyrklem i linijką. Gauss dowiódł, że nie tylko liczba 17, ale też 257 ma tę własność (mają ją, wcześniejsze niż 17, liczby 3 i 5). Jest to zjawisko darowane pozasystemowo liczbie 17. Bok siedemnastokąta foremnego wpisanego w koło o promieniu 1 spełnia pewne warunki algebraiczne konieczne dla wspomnianej konstrukcji. Dzięki tej konstrukcji liczba 17 uzyskuje w c i e l e n i e w pewną sytuację geometryczną. To tego rodzaju wcielenia mógł mieć na myśli Moses Mendelssohn. Geometria służy wielu możliwościom tego rodzaju wcieleń, dostatecznie prostych dla liczb takich jak 2 i 3. Ale wspomnijmy też trójki pitagorejskie poczynając od trójki (3, 4, 5).

Pewnym liczbom, takim jak 2 i 5, wcieleń dostarcza już przyroda. To nasze pięć palców stworzyło system dziesiętny, matematyczność to tylko akceptowała. Ale system dwunastkowy mógł już być dyktowany samym rytmem arytmetycznym, chociaż nie wykluczamy magii związanej z liczbą 12. Liczne przykłady zjawiskowego zaistnienia liczb mogły prowadzić do przypuszczenia, że jest jakiś magiczny system, który je jednoczy. Tak chcieli widzieć liczbę Pitagorejczycy.

Pogląd o niezależności pojęcia liczby od pojęć o przestrzeni przypisaliśmy Dedekindowi. Ale ten pogląd głosił również współczesny mu Gottlob Frege. Upatrywał on jednak istotę liczby w jej aspekcie ilościowym, a nie jak Dedekind w jej aspekcie porządkowym, wyznaczonym przez jej rytm indukcyjny.

Pojęcia o liczbie mogłyby zamknąć się same w sobie. Liczba stara się jednak być obecną w całej matematyce. Liczba s ł u ż y matematyce. Jej rytm pierwotny słyszymy w zjawiskach, w które się wciela. Są wszakże zjawiska matematyczne, które ten rytm omijają. Przykładem jest topologia, ale nie tylko. Bo i teoria liczb w swoich najgłębszych partiach rytmem indukcji nie jest zainteresowana.

Geometria

Geometria, ta jaką widzimy u Talesa, jest wolna od pojęcia o liczbie. Jest, co widzimy u Euklidesa, fizyką naszego z m y s ł u w i d z e n i a. Ale zaczynamy dodawać do siebie odcinki prostej, a Pitagorejczycy upominają się o ich wspólne miary. Ten prosty sposób na arytmetyzację zawodzi. Niedługo później jednak Euklides (a może Eudoksos) proponuje algorytm, który odkrywa bogactwo natury arytmetycznej w zakresie niewspółmierności, które za Teajtetem wyrażamy ułamkami łańcuchowymi. Geometria nagle wzbogaca się o metody nieskończonościowe, których sama w swoich początkach się nie spodziewała. Eudoksos, a za nim Archimedes, starają się uchronić geometrię od trudności powstałych na skutek inwazji nowego żywiołu. Ustępuje geometria. Prostej wprawdzie nie zabrania się być nieskończoną, ale dla zaspokojenia wymagań arytmetyczności każdy jej punkt ma być osiągalny odkładaniem odcinka, nawet jakkolwiek małego. Ustępuje w ten sposób również arytmetyka, rezygnując z pozaskończoności. Dzięki temu rozszerzone prawdy matematyczne nadal pozwalają się lokować w naszej świadomości.

Adaptacja prawd arytmetycznych do świadomości matematycznej ukształtowanej w Dniu Szóstym będzie odtąd stałym problemem matematyki. Znane jest powiedzenie Eulera, że jego ołówek odkrywa rzeczy bez jego w tym udziału.

Platon, który prawdy matematyczne uważał za przedwieczne, musiał mieć na myśli prawdy arytmetyczne. Wchodzą w nasz świat S bez naszej zgody, formując go na swój sposób. Według Fregego, od prawdy arytmetycznej nie ma apelacji, a według powiedzenia Cantora, nie ma w arytmetyce miejsca na hipotezy, to jest na zdania, których prawdziwość byłaby zależna od czegoś poza nią.

W geometrii nie jesteśmy biernymi widzami. Geometria, rozwinięta później topologia i budowana w oparciu o nie fizyka matematyczna, są konstrukcjami naszymi. To tam odnajdujemy siebie, kształtując pojęcia o świecie i przestrzeni. Ale bywa, że uprzedza nas w tym arytmetyka, przez co nasze wyobrażenia o przestrzeni nie są całkiem nasze.

Gotowi bylibyśmy widzieć geometrię po prostu jako matematykę naszego zmysłu widzenia. Nie idziemy wszakże w tym za daleko. Koło dla Greków było kołem niemal fizycznym. Jeśli jednak zapomnimy o wypełniającym koło fizycznym płaskim dysku, to zobaczymy w nim linię zamkniętą, po której może coś biec. Istotnym aspektem koła staje się c y k l. A jest jeszcze koło, które może się zawęźlać, a jest też koło, które może być *brzegiem* niekoniecznie dysku. Nie miał więc może do końca racji *Moses Mendelssohn*, bo również obiekty geometrii osiągają poziom trwałych wzorców wcielających się na wiele sposobów w rozliczne sytuacje, jakich doświadcza świat S. Jest też takim wzorcem nie tylko koło, bo również i *trójkąt*, chociaż może nie kwadrat.

Przebieg ewolucji pojęć, w końcu zależny od zdarzeń nieprzewidzianych, nie pozwolił rozwinąć się pojęciom geometrycznym w sposób czysty, jako *topologiczne*. Nie jest nam jednak obca myśl o istotach żywych, których świat S ukształtowany jest przez zmysł *dotyku*, które nie mają innych pojęć niż topologiczne, którym nieobce jest pojęcie linii zamkniętej i prostej, rozumianej po prostu jako przegroda.

Wcielając się w sytuacje geometryczne, liczba ewoluuje, wzbogacając się o cechy swego nosiciela. Przyjmuje rolę długości, pola, masy i przebiegu. Dozwala na, nieobecną w samej teorii liczb, podzielność w nieskończoność, wreszcie i ciągłość. *Liczba ciągła* ma taki właśnie początek. Wyrasta z dwóch źródeł. Jednym jest wspomniany konstrukt czysto arytmetyczny, drugim jest czerpane z fizycznych właściwości rzeczy *continuum* Arystotelesa, nad którego pozaliczbową naturą rozmyślał w naszych czasach Hermann Weyl. Jeśliby jednak przyjąć za Cantorem, że pojęcie liczby ciągłej nie wymaga odwołań się do fizyczności, że można je wyprowadzić logicznie z właściwości tkwiących już w systemie liczb naturalnych, w oparciu o czysto myślowe pojęcie *zbioru*, znaczyłoby to zgodę na pełną arytmetyzację matematyki.

Ruch i zmiana

Matematyka starożytnych była, jak to określał Arystoteles, nauką o bytach nieruchomych. Było to samoograniczenie wymuszone przez paraliżującą myśl aporię Zenona o strzale, która nie pozwalała na rozumienie zmiany jako procesu. Tymczasem zmiana jest istotą zjawisk fizycznych. To właśnie wzrostowi i zanikowi poświęcił Arystoteles w swojej *Fizyce* cały rozdział. Ale sytuacje, gdzie obserwujemy zmianę, nie mają ze sobą powiązań. Może to być droga narastająca w czasie, nasilenie barwy, czy też tempo przyboru wody w strumieniu.

Ideę ich wspólnego ujęcia matematycznego podjęli filozofowie scholastyczni XIV wieku. Calculatores z Merton College z Oksfordu i filozofowie z Paryża wyszli od spostrzeżenia, że to, co bezpośrednio podlega obserwacji w zjawiskach, to nie sama wielkość zmiany, lecz jej intensywność, która obserwowana w określonym zakresie determinuje zmianę ilościowo. Jednym z przykładów była intensywność łaski Bożej spływającej na człowieka, która się w nim nagromadza sumarycznie na sposób, który Newton i Leibniz nazywali później całką. Jest też intensywność siły wtłaczanej w poruszające się ciało, która determinuje jego impet – a więc prędkość. Jeśli więc siła – a tak jest przy spadku swobodnym – jest niezmienna w czasie, prędkość wzrasta w czasie jednostajnie. Scholastycy zawierzyli wdrukowanemu w nas zmysłowi pozwalającemu nam odczuwać stopień natężenia oddziaływań. Galileusz nie wierzył tej wrodzonej nam intuicji i sprawdzał.

Pełne włączenie tej idei czternastowiecznej w zarysowującą się już konstrukcję matematyczną zawdzięczamy Newtonowi i Leibnizowi, chociaż pominęliśmy prekursorów, Keplera i Torricellego, a przede wszystkim Arystotelesa, bo to na gruncie jego planu powstawał opisywany tu nowy dział matematyki – a n a l i z a   m a t e m a t y c z n a – w której Newton widział geometrię Euklidesa wzbogaconą o naukę o ruchu.

Był to skok w rozwoju, ale – wróćmy do naszej mitologii – skok w obrębie pojęć matematyki Dnia Szóstego. Zauważmy przy tym, że intensywność zmiany ma jakieś podobieństwo do liczbowego rytmu Dnia Pierwszego, jest jakby tego rytmu c i ą g ł y m wypełnieniem. Podobnie jak rytm arytmetyczny, ma on zastanawiającą rozmaitość wcieleń, nadając pojęciom matematycznym nowe szybsze tempo rozwoju. Nie trzeba będzie nawet stu lat, aby c a l c u l u s Newtona przeszedł w równania struny u Eulera. Przypomnijmy, że to właśnie intensywność – wielkość, która była tak trudna do określenia – jest tym, co podlega bezpośrednio obserwacji, a także pomiarowi. Tę prawdę wyraża nam równanie różniczkowe, które z danych związków między intensywnościami obiecuje nam odtworzyć związki między samymi wielkościami, które bezpośredniej obserwacji nie są dostępne.

Rozumienie metod różniczkowych nie zawsze będzie nadążało za rachunkiem. Przyznawał to Euler we wstępie do swojego trzytomowego dzieła, a nie chodziło już tylko o anegdotyczny ołówek. Motywacje analizy wywodzą się z szerszego zakresu niż te, które wystarczały geometrii. Włącza się zmysł poczucia czasu, natężenia siły i poczucia nagromadzania się wielkości, na wiele sposobów wcielając się w matematykę.

Metafizyczność tych motywacji odczuwamy dużo silniej niż w zakresie motywacji geometrycznych, których źródło jest niemal bezpośrednie. Motywacje analizy są głęboko w nas ukryte, najczęściej nie są naszymi bezpośrednimi przekonaniami wynikającymi z własnego doświadczenia, lecz zdają się raczej wynikiem w d r u k o w a n i a ich w nas – używając zwrotu Konrada Lorenza – we wczesnych stadiach naszej ewolucji, chociaż może nie chodzi tu o Dzień Pierwszy. Słowacki w *Genesis z ducha* dziękuje mrówce, której doświadczeniem się kieruje.

My to wszystko nazywamy i n t u i c j ą. Na przykładzie intuicji, która doprowadziła do odkrycia calculusu, widzimy intuicję jako sumaryczne doświadczenie przedmatematyczne, c a ł k ę z naszych doświadczeń, nie tylko nas samych, lecz całego biegu ewolucji. Bywa, że nie ufamy intuicji, ale Pascal dopowiadał, że to dlatego, iż aż nazbyt często bywa bezbłędna. Dodajmy wszak, że nie każde przekonanie powinno być nazwane intuicją.

Matematyka scholastyków i Newtona, a nie pomińmy Keplera i Cavalleriego, zaczerpnęła jeszcze raz pełną garścią z dostępnego nam zmysłami świata. W swoich początkach była jeszcze wolna od wpływu arytmetycznego. Było to jeszcze wtedy, kiedy Newton formułował prawa dynamiki i poddawał im prawa Keplera rządzące ruchem planet, a nawet jeszcze wtedy, kiedy Jan Bernoulli wyjaśniał problem brachistochrony, a Euler problem struny.

Matematyczność przyrody

Przyroda p o z w a l a się widzieć matematycznie. Dla przedstawienia problemu, wróćmy do pełnego toku naszych wywodów. Mówiliśmy o świecie S i wbudowanej weń konstrukcji pojęć. Nie dzieliliśmy jej na matematyczną i niematematyczną. Dopiero w którymś momencie pojawiła się matematyka, którą zazwyczaj wyodrębnia się spośród ogółu dociekań ś c i s ł o ś c i ą – inaczej r y g o r e m – cechą wcale dla niej nie najważniejszą. Nierygorystyczne fazy rozumowań s ą r ó w n i e ż matematyką, chociaż woleliśmy je nazwać matematycznością, aby nie wychodzić poza ustalony zwyczaj. Nie wykluczamy więc, że wszystko w świecie jest matematyczne, przynajmniej potencjalnie.

Pozostają wszakże całe obszary zjawisk przyrody, do których z naszą matematyką nie zaglądamy. Z geometrią Euklidesa można iść w dowolnie dalekie regiony kosmiczne, uzyskując nadal sensowny opis zjawisk. Korzystał z tego Einstein. Ale już Riemann zauważył, że wiarygodność fizyczna naszej geometrii zatraca się, jeśli przechodzimy ku mikroskali. Naiwne przekonania o symetrii, w jakiej pozostają do siebie nieskończoność i zero, trzeba odrzucić. Riemann dokładnie się nie wypowiadał, ale już w jego czasach budowa punktowa otoczenie zera była uświadomioną trudnością myślową.

Fizyka dwudziestego wieku, wchodząc w mikroświat, doświadczyła tego, co było przeczuciem Riemanna. W mikroświecie nie ma bezpośrednio nic do powiedzenia nasza matematyka, która potrafi się tam dostać jedynie za pomocą konstrukcji przestrzeni abstrakcyjnych, a więc w istocie za pomocą czystej arytmetyki, która w matematyczności ma pozycję specjalną. Nie uzyskujemy obrazu podlegającego kontroli zmysłów. Wymiar, o jakim mówi się w teoriach kwantowych, nie tłumaczy się na wymiar odbierany zmysłowo. Pewne rzeczy można przybliżać wyobraźni poprzez analogie w stylu Bohra, w istocie poprzez metafory.

To, że jakieś zjawisko pozostaje p o z a naszą matematyką, nie znaczy że jest niematematyczne. Jest po prostu dla nas matematycznie pustą krainą. Na tym niewielkim fragmencie, który jest nam dostępny, stwierdzenie, że przyroda jest matematyczna, jest nie więcej niż t a u t o l o g i ą.

Pójdźmy jednak krok dalej za tautologicznością tej tautologii. Przyjmijmy sposób widzenia zafascynowanego Schopenhauerem Witkacego, że świat zewnętrzny zawdzięcza swoją matematyczność n a m. Matematyka nie wnika jednak w istotę świata, daje nam tylko pewien przekaz. Grawitacja jest wielką tajemnicą świata, a my dostrzegamy tylko kwadrat w prawie ciążenia i związek tego kwadratu z eliptycznością torów planet. Stwórca nie musiał znać tych wzorów, nie były mu one potrzebne dla rozumienia swego zamysłu. Nic nie ujmiemy, a nawet przeciwnie, dodamy powagi Stwórcy, jeśli uwolnimy Stwórcę od wchodzenia w nasze wzory matematyczne.

Arytmetyzacja matematyki

Intuicje, które kierowały Calculusem, a które jeszcze wystarczały Eulerowi, zmuszone były w końcu dać się wyręczyć radykalnemu środkowi, jakim była arytmetyzacja analizy matematycznej dokonana w początkach XIX wieku za sprawą Cauchy'ego. Analiza matematyczna Cauchy'ego jest od samego początku całkowicie arytmetyczna. Prostej nie musi się widzieć geometrycznie. Prosta ma być teraz systemem liczbowym, a funkcje – dawne fluenty – określone są arytmetycznie punkt po punkcie. Nie musimy widzieć, by liczyć.

Cauchy nie poszerzał matematyki na ten sposób, w jaki kilka wieków wcześniej poszerzył matematykę Calculus, podporządkowując matematyce niedostępne jej dotąd rejony odczuwania świata. Matematyka Cauchy'ego nie poszerzała zmysłu matematycznego. Był to nawet ruch wsteczny, wykluczający z analizy pewne jej idee, jeśli nie dawały się poddać jedynej w niej idei, którą była ścisłość natury arytmetycznej. Cauchy zredukował analizę Newtona do pojęcia liczby. Nie był to wszakże powrót do idei pitagorejskiej. Nie wchodzi się dwa razy do tej samej rzeki. Liczba u Cauchy'ego nie była dawną czystą ideą pitagorejską, lecz tworem myślowym, który wszedł do matematyki jako continuum liczbowe, pomyślane tak, by mogło być polem, na którym dawne pojęcia i postulaty Newtona mogły być ukształtowane w teorię i twierdzenia. W niedługim czasie pojawiła się idea zredukowania całej matematyki do kilku prostych zasad, chociaż nie od razu przewidziano na jakiej drodze dojdzie do wielkiej unifikacji. Kronecker uważał, że samo pojęcie liczby należy zostawić takie, jakim było. Protestował, widząc próby szukania unifikacji w pojęciach bardziej pierwotnych.

W matematyce Cauchy'ego funkcja przestawała być p r a w e m zależności. Nie było przeszkód dla określania funkcji punkt po punkcie, co pomijało ukształtowane dotąd intuicje, chociaż dowierzano funkcjom zadawanym dowolnym ruchem ręki, a więc c i ą g ł y m z samej swojej natury. Okazało się wszakże, że dowolny ruch ręki nie wnika w pełni we wszystkie aspekty intensywności procesów. Ciągłość nie zapewnia istnienia pochodnej, a całka nie zawsze jest zdolna do odtworzenia funkcji z istniejącej wszędzie pochodnej. Okazało się, że to przekonanie Calculusów i Newtona ma jakieś wyjątki. Cała druga połowa XIX wieku i wiek XX w matematyce to koncert frapujących wyjątków, jakie zaczęła dostarczać pozbawiona dawnych ograniczeń zarytmetyzowana matematyka.

Odczuwamy nostalgię za matematyką Dnia Szóstego, ale nie wydaje się, by mogła ona poddać swojemu oglądowi rytm Dnia Pierwszego, czemu naprzeciw wyszedł właśnie Augustine Cauchy. W świecie Dnia Szóstego zjawiska mają charakter jakościowy i objawiają się n i e r ó w n o ś c i a m i. Równościom pozostawiony jest status wątpliwych co do zaistnienia stanów granicznych. Arytmetyczność to koncert r ó w n o ś c i, t o ż s a m o ś c i i r ó w n a ń, a więc samych osobliwości z punktu widzenia świata Dnia Szóstego. Doznania redukują się do dwóch wartości logicznych, otwierając jednocześnie furtkę ku dwuwartościowej kombinatorycznej eksplozji.

Hermite i Poincare sprzeciwiali się tej inwazji osobliwości, ale też i odcięciu matematyki od jej źródeł przyrodniczych, z których matematyka już nie wyrastała, lecz do których jedynie mogła w r a c a ć poprzez z a s t o s o w a n i a – pojęcie d a w n i e j n i e z n a n e.

Poszerzanie intuicji

Okazało się jednak, że nasza wyobraźnia potrafi rozbudować się i adaptować wspomniane osobliwości. Potrafiliśmy rozszerzyć nasz zmysł matematyczny, wbudowując zarytmetyzowaną analizę w naszą świadomość. Zdolność naszej świadomości do adaptacji w sytuacjach daleko odbiegających od doświadczeń zmysłowych okazała się większa niż ta, którą widzieli wielcy sceptycy. Mimo że nie obserwujemy funkcji Cantora – Lebesgue'a w zjawiskach przyrody, to jednak umiemy ją umieścić nie tylko w naszym świecie S, ale potrafimy sobie wyobrazić pewne stany graniczne zjawisk przyrody, w których ta funkcja się pojawia się już nie jako osobliwość, lecz jako stan graniczny idealny.

Przykład zarytmetyzowanej matematyki stawia przed nami pytanie o to, jak daleko świat S naszych myśli może pójść w adaptacji osobliwości arytmetycznych, wbudowując odpowiednią w nas zmysłowość już ściśle matematyczną, o której pisze Felix Klein w jednym ze wspomnianych na wstępie wykładów.

Wydaje się, że ta zdolność adaptacyjna jest daleka od wyczerpania pod warunkiem wszakże, by nie naruszone były prawa jakimi świat S się rządzi. Dowód komputerowy twierdzenia o czterech barwach nie spełnia tego warunku. Świat S nie pozwala się wyręczać w potwierdzaniu niewypracowanych przez siebie prawd. Akceptacja prawdy jest w jego gestii i żaden dowód, który nie angażował emocjonalnie świata S, nie może być przez świat S uznany. Dano to kiedyś do zrozumienia Galileuszowi, który zważył pole pod cykloidą i mimo że wynik był prawidłowy, nie zaistniał w matematyce.

Zbiór i liczba

Zbiory są już u Euklidesa. Słynny dowód nieistnienia największej liczby pierwszej poprzedzony jest w *Elementach* rozwinięciem teorii podzielności wykorzystującej rytm indukcyjny zbioru liczb naturalnych. Wraca do tego Gauss. Zbiór nie jest u Gaussa, podobnie jak u Euklidesa, jeszcze pojęciem, lecz jedynie wygodą słowną. Ale teraz zbiór nie musi być z góry dany. Ten zbiór się wprowadza do rozważań i wprowadza się działania na jego elementach. Przykładem jest zbiór przedstawiający kratę liczb całkowitych na płaszczyźnie z działaniami takimi jak na liczbach zespolonych. Po wprowadzeniu pojęcia podzielności powstaje system liczbowy inny niż znany dotąd system liczb całkowitych. Ma sens pojęcie liczby pierwszej i prawdziwe jest twierdzenie o rozkładzie na czynniki pierwsze, ale w pewnych kratach budowanych według tego wzoru są wyjątki dla jednoznaczności rozkładu. Dla Dedekinda – ucznia Gaussa i twórcy algebry abstrakcyjnej – nie było już wątpliwości, że zbiory są nieodłącznym towarzyszem liczby.

Samo pojęcie zbioru nie ma wyraźnego wbudowania w naszą zmysłowość. Zbioru nie widzimy w formie c z y s t e j, lecz zawsze we w c i e l e n i u w jakąś sytuację matematyczną. Z drugiej jednak strony, pojęcie zbioru czystego elementu i należenia do zbioru, zaspakaja jakąś naszą potrzebę myślową i było od dawna obecne w rozmyślaniach filozofów. Nie było jednak potrzebą matematyki.

W pierwszym odruchu myśli chcielibyśmy widzieć zbiory czyste jako tworzywo liczby. Tymczasem, jak zauważa A l e x a n d e r W i t t e n b e r g w pełnej gruntownych przemyśleń książce, konkretne czysto myślowe zbiory są dane nam od razu wraz z liczbą. Zbiór i liczba wydają się dla naszej zmysłowości nierozłączne. Filozof, który akurat widzi to zdanie, podpowiada, że może to być r z e c z t a s a m a. Miejmy na uwadze światło, które objawia się nam raz jako strumień cząstek, a raz jako fala, z tym, że liczba ujawnia dwa jakby niezależne aspekty: porządkowy i ilościowy.

Frege proponował widzieć liczbę jako abstrakt powstały po utożsamieniu w s z y s t k i c h zbiorów tej samej liczności. Z pojęć o zbiorze wyprowadzał aspekt ilościowy liczby. Russell wskazał na niewykonalność tego zamiaru z powodu trudności związanych z pojęciem o zbiorze wszystkich zbiorów. Cantor upatrywał załamanie tego zamysłu gdzie indziej. Widział liczby jako pewne wyróżnione elementy swojej skali liczb porządkowych. Abstrakcja Fregego jest zbędna – twierdził – skoro dla abstraktów mamy zawczasu gotowych reprezentantów.

Liczbowość, nie pojęcie o zbiorze, kierowało Cantorem, kiedy będąc na kroku ω, reprezentującym pełny ciąg liczb naturalnych, stawiał kroki ω + 1, ω + 2 i dalsze. Ale czy były one oczekiwane przez jego świadomość, czy był to przymus myślowy, któremu się poddawał? Z tego, co możemy wyczytać z jego *Memoire Nr 5*, było to wymuszenie. Po przekroczeniu progu nieskończoności, nie odczuwamy spodziewanego poczucia poetyczności. Skala liczb porządkowych jest w swoich początkowych partiach, po wyjściu poza liczby naturalne, szara. Dopiero w dużej skali ujawnia się w niej echo rytmu pierwotnego, następstwa, nieodwracalności i niemożliwości powiedzenia s t o p.

Wobec nieokreśloności w naszej zmysłowości, zbiory wcielają się w materię matematyczną nieraz podstępnie bardzo daleko, a wchodząc w nieswoje role, mylą nasze zmysły. Cantora zaskoczyło odkrycie, że płaszczyzna ma tyle samo punktów co prosta, i trzeba było dopiero doświadczonego Dedekinda, aby widzieć, że nie obala to niczego, co naruszałoby nasze wyobrażenia o wymiarze. Zbiory wcielają się – jak się powszechnie sądzi – we w s z e l k i e sytuacje matematyczne. Według Dedekinda, dają tym sytuacjom swoiste ich rozumienie. Rozumiemy lepiej prostą geometryczną, jeśli rozmieścimy na niej jakieś punkty, dochodząc w końcu do zbudowania zbioru nazywanego c o n t i n u u m, którego system elementów odzwierciedla w sensie porządku system punktów prostej. Według Dedekinda, continuum – nie będąc tym samym co prostą – o b j a ś n i a pewne aspekty jej budowy. Na elementy zbioru – pisze Dedekind – nie musimy patrzeć jako na budulec, lecz jako na c o ś c o s ł u ż y. Elementy continuum służą wyjaśnieniu jego budowy, nie są jednak tym, co je s t a n o w i. Tak widział Dedekind rolę zbiorów w *Stetigkeit und irrationale Zahlen*.

Ale zbiory widziane jako b u d u l e c konstrukcji matematycznych również nie są nam obce. Już starożytni próbowali myśleć o figurach geometrycznych jako zbudowanych z punktów. Prowadziło to jednak do licznych trudności, które przedyskutował Arystoteles, znając wcześniej wypowiedziane obiekcje Zenona z Elei. Widzimy nadal w tym trudność. Budowa punktowa przestrzeni kłóci się z naszymi o niej geometrycznymi wyobrażeniami. Ale właśnie to dzięki tej niezgodności wiemy o przestrzeni coś, czego bez tego testu byśmy nie wiedzieli. Matematyka penetruje teren hipotezami, które pełnią w niej rolę eksperymentów.

Kiedy oderwiemy się od kontekstu geometrycznego, zbiór staje się dla nas z b i o r e m c z y s t y m i żadna zmysłowość nie broni nas przed pomyśleniem zbioru jako z b u d o w a n e g o ze swych elementów. Jest to sytuacja Cantora.

Cantor dał dwa dowody, że liczebność punktów continuum przewyższa liczebność zbioru liczb naturalnych, dowodząc, że żaden ciąg jego elementów nie wyczerpuje całego continuum.

W pierwszym dowodzie (1874) trzymał się kontekstu geometrycznego, patrząc na continuum jak na punktowo zbudowaną prostą. Mając ciąg punktów wykazywał, że nie wypełnia on prostej. W tym celu rozważał odcinek omijający pierwszy wyraz ciągu, następnie zawarty we wnętrzu tego odcinka odcinek omijający drugi z kolei wyraz, i to postępowanie kontynuował. Punkt leżący w przekroju tak otrzymywanych odcinków jest różny od każdego z wyrazów ciągu. Istnienie tego punktu na continuum jest zapewnione wymaganiem ciągłości uporządkowania, jakie ma continuum. Otrzymany punkt jest zmysłowo dotykalny.

W drugim dowodzie (1890) – dużo późniejszym – ignoruje porządek na continuum, a widzenie jego elementów redukuje do ich rozwinięć cyfrowych. Dla uproszczenia, niech będą to rozwinięcia dwójkowe, z cyframi 0 i 1, w których te cyfry mogą być traktowane jako symbole. Poza każdym ciągiem tego rodzaju układów cyfrowych jest układ niewchodzący w skład dotąd rozważanych. Przykładem jest układ, którego n-ta cyfra jest różna od n-tej cyfry n-tego z kolei układu. Ten dowód, zwany p r z e k ą t n i o w y m, przebiega w czystej myśli, bez udziału wyobrażeń geometrycznych, a nawet liczbowych...

Dowiedliśmy, że zbiór wspomnianych układów jest większej liczebności niż zbiór liczb naturalnych. Nic nie stoi na przeszkodzie, by to samo rozumowanie przeprowadzić na tym większym zbiorze, rozpatrując na nim funkcje, których wartościami są symbole 0 i 1. Otrzymany zbiór jest liczebniejszy od poprzednio otrzymanego. Nie można zatrzymać myśli przed pomyśleniem dalszego takiego kroku. Skala liczebności zbiorów okazuje się niczym nieograniczona!

Poprzedni dowód, geometryczny, nie powodował tego rodzaju e k s p l o z j i. Zbiory związane z sytuacjami kontrolowanymi zmysłowo nie eksplodują!

Podane dwa dowody są w pewnej analogii do dwóch dowodów istnienia wielkości niewspółmiernych, które przekazała nam starożytność. Niewspółmierności były odkryte najpierw w geometrii na przykładach, między innymi boku kwadratu i przekątni oraz boku i wysokości w trójkącie równobocznym, z indywidualnymi dla każdego przypadku dowodami opartymi na prawach przestawania trójkątów. Późniejszy dowód Euklidesa oparty na twierdzeniu liczbowym o jednoznaczności rozkładu liczby na czynniki pierwsze, daje jednym rozumowaniem nieskończoną serię przykładów, co na owe czasy można było uznać za eksplozję. W dowodzie uczestniczyło pojęcie zbioru.

Dobry porządek

Profesor Mikusiński chciał się koniecznie sam przekonać, że lemat Zorna można wyprowadzić nie używając liczb pozaskończonych, i podał ładny tego dowód. Budował w tym celu w danym zbiorze częściowo uporządkowanym łańcuch nieprzedłużalny przy pomocy samego tylko pewnika wyboru. Lubił przypominać ten swój dowód, ale za którymś razem można było usłyszeć uwagę: chciałem ominąć liczby porządkowe, ale kiedy budowałem łańcuch nieprzedłużalny, ten – mimo, że wcale tego nie chciałem – okazał się dobrze uporządkowany.

Podziwia się Cantora za jego konstrukcję skali dobrze uporządkowanej, Ale nietrudna obserwacja przekonuje nas, że ten dobry porządek tworzył się sam! Wcześniej niż Cantor przekonał nas w *Was sind und was sollen die Zahlen?* o apriorycznym wbudowaniu w nas dobrego uporządkowania Dedekind. Mając myśl, nie potrafimy uwolnić się od myśli o tej myśli i wpadamy w przymus iteracji, w indukcyjnie dynamiczny system liczb naturalnych. Ten porządek, nazwany umownie d o b r y m, daje nam w podarunku sama natura naszego myślenia. Porządki z w y k ł e nasza myśl zapożycza ze zjawisk spoza świata S.

Uważa się, że dobry porządek to wymaganie dodatkowe. Nic błędniejszego! Znaczyłoby to bowiem, że dla uzyskania dobrego porządku wystarczyłoby najpierw mieć porządek j a k i k o l w i e k, a potem go poprawić. Tymczasem nie umiemy dostać tego jakiegokolwiek porządku samą konstrukcją myślową. Continuum, które punktami wypełnia prostą, budujemy mając wcześniej podpowiedź od przyrody. Zgodziłby się z tym Hermann Weyl. Ten o naturze fizycznej pręt n i e j e s t tworem arytmetycznym. Arytmetycznie budujemy tylko jego pewną egzemplifikację.

Wymaganie zwykłego liniowego porządku jest logicznie słabsze, ale matematyka apriorycznie w nas wbudowana, nie obdarzyła nas żadnym przykładem, Ogólniejszą, podobną sytuacją jest próba pomyślenia d o w o l n e g o z b i o r u bez odwoływania się do żądnych zmysłowych spostrzeżeń. Nie umiemy pomyśleć tu innych przykładów poza systemem liczb naturalnych i jego odcinkami początkowymi. Dorzućmy to tego jeszcze odcinki liczb porządkowych Cantora. Nie mamy innych apriorycznie wbudowanych w nas zbiorów niż wspomniane zbiory l i c z b, które same są w istocie liczbami. Wspominaliśmy o tym już wcześniej powołując się na Wittenberga. Nie zwracają uwagi na ten paradoks twórcy teorii mnogości.

Matematyka aprioryczna w nas wbudowana jest matematyką a r y t m e t y c z n ą. Ten n i e n a s z rdzeń jest s o l ą naszej matematyki. Ale jej k w i a t e m jest matematyka s ł a b a, ta, którą sami myślowo wypracowujemy. Jej przykładem są kontemplacyjne zasady geometrii i calculusu. Ta matematyka, karmiona postrzeżeniami idącymi od świata zewnętrznego, tworzona jest przy pełnym udziale naszej świadomości, Wydaje się, że mogłaby zaistnieć bez udziału arytmetyki. Ale można też pomyśleć matematykę czysto arytmetyczną. Myśląc o naturze matematyki, powinno się brać pod uwagę te dwie skrajności, wcale realne.

Eksplozja i zwieńczenia

Widzieliśmy wcześniej, jak zbór w postaci czystej pozostawiony sam sobie eksploduje niedającymi zatrzymać się przez myśli myślowymi konstrukcjami. Rozpatrywana tam funkcja przyjmująca na elementach zbioru symboliczne wartości 0 lub 1, może być widziana jako p o d z b i ó r zbioru, złożony z tych elementów zbioru, na których funkcja przyjmuje wartość

1. Twierdzenie Cantora można więc rozumieć tak, że z b i ó r p o d z b i o r ó w zbioru przewyższa liczebnością sam zbiór. Poprzednią eksplozję widzimy teraz nieco prościej.

Tak liberalne rozumienie podzbioru napotyka na określone przeszkody, jeśli continuum widzimy geometrycznie. Od podzbiorów teraz można czegoś wymagać, na przykład tego, by można było na nich rozwinąć pojęcia miary i całki. Jeśli zbiór ma strukturę grupy, sensowne są podzbiory zamknięte ze względu na działanie grupowe, to jest podgrupy Na zbiorze czystym nie ma możliwości n i e p o m y ś l e n i a zbioru, który da się pomyśleć, a nawet do jego usunięcia, jeśli już zawitał do naszych myśli. Nie możemy nie pomyśleć zbioru pustego, jeśli już jakoś został pomyślany. Ta niemożliwość niepomyślenia zaciążyła na całej teorii zbiorów. A jest to niczym innym niż to, co Cantor w *Memoire Nr 5* nazywał s w o b o d ą przyjęcia na myśl wszystkiego, co nie prowadzi do logicznych sprzeczności. W innych słowach, i raczej z troską niż z wyczuwanym tu sarkazmem, wypowiedział to Profesor Andrzej Mostowski w latach 50. na Kongresie w Pałacu Staszica.

Teoria zbiorów zna jeszcze jeden przymus, który jest wspólny s w o b o d n i e rozwijającym się teoriom. Jest to przymus z w i e ń c z e ń. Zetknęli się z tym już Ojcowie Kościoła i filozofowie scholastyczni (inni niż ci, którzy byli prekursorami calculusu), dyskutując o uniwersaliach takich jak praprzyczyna i omnipotencja. Ale wcześniej był Platon, który dla połączenia rzeczy w świecie oddzielonych, powoływał do świata S naszych myśli idee n a d r z ę d n e, które miały te rzeczy wytłumaczać.

Ten przymus myślowy kierował filozofów bizantyńskich – jak czytamy o tym u Focjusza – do rozumienia wielości poprzez dostrzeżenie w niej wspólnotowej jedności. Surowa myśl Arystotelesa i Newtona odrzucała tego rodzaju myślowe konstrukcje, wypowiadając dumnie swoje *h y p o t h e s e s   n o n   f i n g o*, a Ockham wcześniej wypowiadał swoje: n i e   m n o ż y ć   b y t ó w   b e z   p o t r z e b y.

Coś podobnego napotykamy i w matematyce czystej, będącej konglomeratem nieopowiązanych ze sobą dyscyplin, walczących o miejsce w naszym świecie S. Rozumienie całości, jakie osiągamy rozbudowując pojęcia poza granice wszelkiego odczuwania zmysłowego, jest w istocie ułudą rozumienia. Dodajmy też, że znane nam dotąd zbyt rozbudowane teorie pryskały jak bańki mydlane, będąc w istocie naszymi życzeniami myślowymi. Przypominają się nam przy tej okazji słowa Kroneckera z listu do Cantora o teoriach, które przemijają, a jedyne co z nich zostaje, to w z o r y. Zastąpmy wszakże to archaiczne słowo terminem w z o r z e c, bardziej odpowiadającym współczesnej matematyce.

Bo matematykę można rozumieć też jako kolekcję wzorców, unikając budowania gmachu zwieńczającego wszystko. Mamy tu Sierpińskiego, mistrza detalu. Wchodzimy do matematyki o d k r y w a j ą c jakiś jej frapujący fragment. Te frapujące fragmenty są istotą matematyki, wiążą ją poprzez odczucia zmysłowe z prawdziwą rzeczywistością. W ich odkrywaniu zmysł matematyczny wychodzi poza rolę kuriera, w której widział matematyków niechętny matematyce Filozof.

Znane z przeszłości „prawa najwyższe”, którymi obdarzali nas Platon i Hoene-Wroński, dają jedynie ułudę rozumienia. Nie dała się zamknąć analiza matematyczna w wielce obiecujący świat szeregów Taylora, ani geometria w swoje formalizmy osiemnastowieczne. Przypominając jednak te próby, myślimy w istocie o wielkich formalizmach naszych czasów. Na ich przykładzie widzimy, jak po okresie rozwoju i ukazywaniu matematyce nowych horyzontów, przychodzi moment, kiedy zaczynają matematykę ograniczać. W stadium początkowym teorii zbiorów m o g l i ś m y się cieszyć z tego, że w tak wielu rzeczach d a j e s i ę widzieć zbiory. Współczesne tendencje z m u s z a j ą nas do widzenia w postaci zbioru każdej rzeczy.

Spojrzenie w przyszłość

Czytamy u przyrodnika José Delgado (1971), że istotom żywym konieczny jest dla ich zdrowia wewnętrznego nieprzerwany dopływ nowości i pobudzeń idących z z e w n ą t r z. Jest to p o k a r m, bez którego nasze siły myślowe słabną. Jeśli ten dopływ się utrzyma, matematyka ma zapewniony rozwój. Bo nie są dla matematyki przeszkodą trudności dowodowe. Znaczenie twierdzenia matematycznego nie zależy od tego, czy znalazło się dla niego dowód, ale od tego, jakie ma miejsce w naszym świecie S. Lemat Zorna i lemat Urysohna nie przestałyby mieć znaczenia, jeśliby pozostały niedowiedzionymi zasadami. Jeśli stwarzałyby trudności, takie jak kiedyś aporie Zenona, matematyka znalazłaby sposoby, by sięgnąć po przebudowę pojęć. Dlatego to nie twierdzenie Gödla jest tym, co mogłoby zahamować rozwój matematyki.

Przyczyny do obaw są gdzie indziej. Może wydać się niestosownym wypowiadać je w czasie, w którym na naszych oczach padły największe stuletnie problemy, a natężenie potoku rezultatów matematycznych przewyższa wszystko to, co w przeszłości. Niepokój ma jednak swe uzasadnienie, bo natężenie potoku odkryć matematycznych zawdzięczamy uruchomieniu całego nagromadzonego dotąd zasobu środków arytmetycznych, które znajdują dla siebie pokarm wśród problemów już dawniej postawionych.

Wyczerpuje się nasze bezpośrednie odczuwanie matematyki obecnej w zjawiskach. Jak pisze S. P. Zervos, nie uczymy się od naszych braci mniejszych, odcinając się od nieczłowieczych źródeł metafizyki. Ale i nauki przyrodnicze przestały być hojne w problemy. To dzięki nim matematyka rozszerzała się o nowe pola badań, matematyzując nowe obszary. Nie zaspakaja tej potrzeby zmatematyzowana krańcowo fizyka, której problemy są najczęściej wtórnymi problemami matematycznymi. Wgląd w mikroświat mógłby wzbogacić matematykę, ale tak nie jest. Dla jego penetracji fizycy wolą eksploatować dawno już rozwinięte metody matematyczne.

Moglibyśmy wszakże uznać, że matematyka rozwinęła sie już w określonym kształcie i domaganie się stałego jej rozwoju ma postać obsesji. Dlaczego tak nam na matematyce zależy?

Czy na twierdzeniach, które gdy zyskają dowód, czeka status szacownych przedmiotów kolekcji? Nie. Bo chodzi też o utrzymanie napięcia myślowego, tego niepokoju, który towarzyszy pytaniu matematycznemu. Niepokój matematyczny – jego natężenie i jakość – jest tym, co daje nam poczucie żywotności myślowej.

Obawiamy się też zejścia ku matematyczności czystej. Nawet przy całkowitym braku nowych zadań, nasza myśl nie zatrzyma się. Poddana rytmowi pierwotnemu będzie rozwijać do wyczerpania nagromadzonych dotąd możliwości. Poznawanie świata, w którym matematyka dotąd uczestniczyła, zejdzie w niej na daleki plan. Wyobrażamy sobie stan graniczny, kiedy zostaniemy s a m n a s a m z e z b i o r e m i l i c z b ą, których związek ze światem zewnętrznym jest nieoczywisty. Odczuwamy możliwość tej krańcowości. Myśli będą nie tylko myślały się same, ale będą nas zmuszały do gonitwy wraz z nimi bez obietnicy ich przeżywania. Potok myśli może być wtedy pełen prawd – przy tym absolutnych, bo koniecznych – nieznajdujących wszakże oparcia w doznaniach zmysłowych, przez co niemających nic więcej do powiedzenia poza tym, że są prawdami.

Bibliografia

Arystoteles, *Fizyka*.
Bellow S., *Herzog*, tłum. K. Tarnowska, Czytelnik, Warszawa 1971.
Biełyj A., *Petersburg*, tłum. S. Pollak, Czytelnik, Warszawa 1974.
Dedekind R., *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig 1888.
Delgado J., *Mozg i soznanije* (przekład), Mir, Moskwa 1976.
Devlin K., *Żegnaj Kartezjuszu, Rozstanie z logiką w poszukiwaniu nowej kosmologii umysłu*, tłum. B. Stanosz, Prószyński i S-ka, Warszawa 1999.
Dębiec J., *Mózg i matematyka*, Biblos, Tarnów 2002.
Dimnet E., *Sztuka myślenia*, tłum. Z. Czerniewski, Biblioteka Wiedzy 22, Trzaska, Evert i Michalski, Warszawa 1936.
Frege G., *Grundlagen der Arithmetik*, Breslau 1884.
Hardy G.H., *A Mathematician's Apology*, wydanie polskie, Prószyński i S-ka, Warszawa 1997.
Klein F., *Odczyty o matematyce, 1893*, tłum. S. Dickstein, Wydaw. Red. Wiadomości Matematycznych, Warszawa 1899.
Mendelssohn M., *O oczywistości w naukach metafizycznych*, tłum. R. Kuliniak, T. Małyszek, Wyd. Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 1999.
Mikusiński J., *O twierdzeniu Zorna*, „Wiadomości Matematyczne" 1967, 9, s. 225–232.
Neumann J. von, *The Mathematician*, *Works on the Mind*, vol. I, no 1, University of Chicago Press, Chicago 1947, s. 180–196; *The Mathematician*, Part 2 – przedruk March 2006.
Potocki J., *Rękopis znaleziony w Saragossie* (Dzień trzydziesty siódmy), tłum. E. Chojecki, Czytelnik, Warszawa 1976.
Sziłow G.E. [Gieorgij Kaciweli], *Matiematika i diejstwitielnost'*, 1975.
Tatarkiewicz W., *Historia filozofii*, I – III, PWN, Warszawa 2007.
Tolle E., *Potęga teraźniejszości*, tłum. M. Kłobukowski, Galaktyka, Łódź 2010.
Weyl H., *Das Kontinuum*, Leipzig 1918.
Wittenberg A.I., *Vom Denken in Begriffen*, Birkhäuser Verlag, Basel – Stuttgart 1957.
Zervos S.P., *On the development of mathematical intuition*, „Tensor" N. S. 26.